組合せゲーム理論と囲碁

中村 貞吾

1 はじめに

私は文部科学省の在外研究員として 2001 年 4 月より約 1 年間，U.C.Berkeley の Berlekamp 教授の下で「組合せゲーム理論とその応用」に関して勉強する機会をいただいた．Berlekamp 教授は組合せゲーム理論 [1] 研究の第一人者であり，1994 年の彼の著書「Mathematical Go[2]」において，一目を争う囲碁のヨセ局面が組合せゲーム理論を用いて数理的に見事に解析できることを示したが，私が初めてそれを読んだ当時は，その内容を直ちには理解できなかった．というのも，私は元々囲碁プレイヤとしてヨセの出入り計算自体には興味を持ってはいたが，その著書に書かれていた内容には，一介の囲碁プレイヤとしての知識では計れない，しかも，私がこれまでに全く見たこともなかった「組合せゲーム理論」なるものが含まれていたからであった．この著書に触発されて，このときより少しずつ勉強を重ねていたが，今回，幸運にも Berlekamp 教授自身の下で勉強する機会を得たことには大変感謝している．

組合せゲーム理論を囲碁に適用した研究としては，これまでに「ヨセの解析 [2]」と「眼形の解析 [3]」の 2 つの研究が行なわれてきたが，留学中のふとしたきっかけから,「攻合いにおけるダメ数の計算」に組合せゲーム理論が適用できることを発見した．詳しい内容は，2003 年 3 月に開催される第 9 回のゲーム情報学研究会において発表する予定であるが，ここにその概要を簡単に説明してみよう．

2 組合せゲーム理論を用いたダメ数の計算

きっかけは，2001 年 6 月に Berkeley を訪れた Martin Müller 氏が行なった囲碁の攻合いに関するスピーチであった．それは，GPW'99 の彼の論文「Race to capture: Analyzing semeai in Go[4]」の内容をベースにしたものであり，その当時も彼の話を聞いて今回と同様な感想を抱いていたのではあるが，当時は私の中でそれが「組合せゲーム理論」と結びつくことはまだなかった．しかし，今回改めて彼の話を聞いて，以前感じていたことが組合せゲーム理論を用いてうまく説明できることに思い至ったのである．

午前中のミーティングが終って皆で昼食を食べているときに,「組合せゲーム理論がダメ数の計算に適用できるのでは？」ということを Martin や Bill Spight 氏[†1] に話してみたのだが，最初は Martin はあまりいい反応を示さなかったように思う．それというのも，ダメ数は地と違って必ず相手によって減らされる運命にあり，たとえ自分が着手して一手手をのばしても，相手が直ちにダメを詰めて反撃すれば，ダメ数は結局何も着手しない場合と同じだからである．食事用の紙ナプキンに図を書いたりしてようやく言いたいことは理解してもらえたようだが，まだまだ組合せゲーム理論について修行中の身である私自身もその後はヨセ問題にばかり目がいってしまって，ダメ数の計算についての話題は記憶の彼方へ追いやられてしまった．そして，結局，留学中は一度も思い出すことはなかった．

それが，昨年末に Sensei's Library のページの中で Spight 氏が「組合せゲーム理論をダメ数の計算へ適用する...」として Martin と私の名前を上げていたのを見て，昨年の記憶が一気によみがえってきた．そこからは一気呵成である．

[†1] 論文紹介の方にも登場するが，Spight 氏は，組合せゲーム理論を用いたコウの解析では特に素晴しい結果を出している．また，Sensei's Library という囲碁に関する web site (URL は `http://senseis.xmp.net/`) でも，鋭くそして丁寧な解説を見ることができる．このサイトは，囲碁に関する様々な事項がよく分類整理されており，訪れる度にいろいろな新しい発見がある．いろいろな形，手筋，死活，ヨセの話題から Spight 氏による組合せゲーム理論に関する解説に至るまで，プレイヤも研究者も必見のページである．

図 1 を見てほしい．何の変哲もない図だが，この黒のダメ数はいくつと勘定されるのだろうか？ 黒はアタリになっていて，見た目には明らかにダメ数は 1 である．しかし，本当にそうなのか？ 確かに白が着手すればダメ数は 0 になるのであるが，一方で，黒が一子をノビればダメ数は 3 に増える．このような局面は，組合せゲーム理論を用いれば $\{3|0\}$ という通常の数とは異なるゲームとして記述されるのである[†2] [†3]．それでは，次にこの形を組み合わせて作った攻合いの図を見てみよう．図 2 において白のダメ数は 3 である．一方，黒の見た目のダメ数 (活路) は 2 であるが，前の結果を用いて計算すると，$\{3|0\} + \{3|0\} = 3$ となり双方のダメ数が等しいことがわかる．したがって，図 2 の攻合いは先着した方の勝ちとなる．

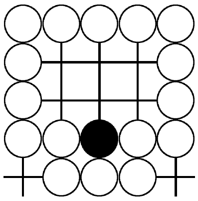


図 1: 黒のダメ数はいくつ？

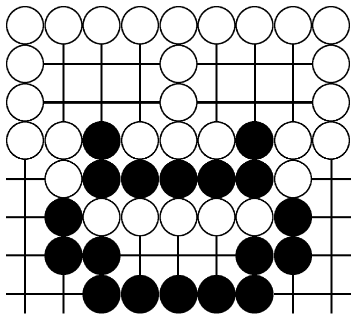


図 2: この攻合いはどちらの勝ち？

さて次は，無限小要素 (infinitesimal) である $*$(スター) や $\uparrow$(アップ) の登場である．
次の 2 つの図を見てほしい．

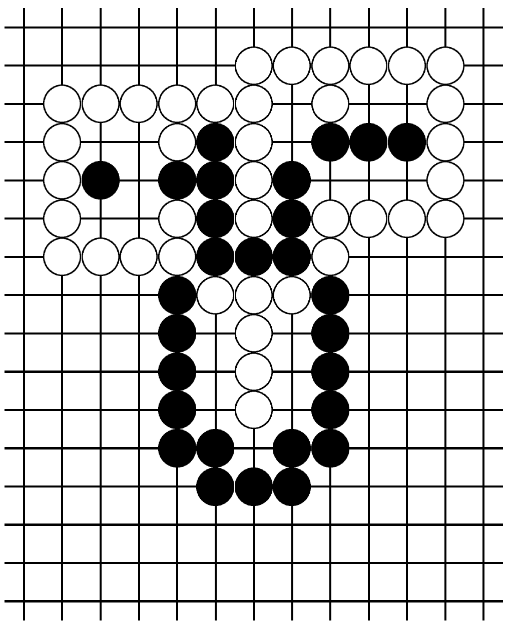


図 3: 黒先で攻め合いに勝つには？

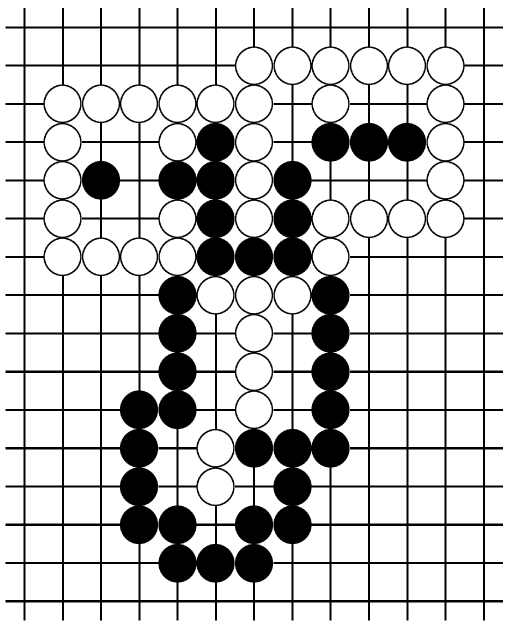


図 4: 黒先で攻め合いに勝つには？

図 3 と図 4 とでは，上方の黒の形は全く同じであるが，下方の白の配置が少し異なっている．黒先

†2 縦棒の左側は黒が着手した後のダメ数，右側は白が着手した後のダメ数である．

†3 「ダメ数 (number of liberties)」には，結局，2 通りの意味がある．1 つは，所謂「活路」で，石に隣接する空点の個数に相当する．もう 1 つは，「相手の石の活路を奪い取るのに必要な手数」の意味である．ダメをつめる前に自分の弱点を守らなければならない場合があるため，この 2 つの値は一般には異なる (前者は，後者の下限に相当する)．攻合いにおける「ダメ数」は，通常は後者の意味で用いられる．

でこの攻合いに勝つには，それぞれの図でどこに着手すれば良いのだろうか？ 両図とも同じ場所なのだろうか？ もちろん,「探索」によって正解を導くことはできるが，組合せゲーム理論を用いればそれがヨセと同様に簡単に計算できるのである．

いつも黒石のダメ，白石のダメと区別して言うのは面倒なので，以下では攻合っている黒石のダメ数を正の数，白石のダメ数を負の数で表わすことにする．まず，攻合っている黒石の左側の部分のダメ数 (B_L) が $B_L = \{4|0\}$ であり[†4]，右側の部分のダメ数 (B_R) が $B_R = \{6|\{4|0\}\}$ である[†5] ことはすぐにわかる．同様に，図 3 における白のダメ数 (W_3) は $W_3 = -7$ であり，図 4 の白のダメ数 (W_4) は $W_4 = \{-5|-9\}$ となる．そうすると，例えば図 3 の攻合いの勝ち負けを判定するには，$G_3 = B_L + B_R + W_3$ のゲームについて解析すればよいということになる．そのために，G_3 に対して「2 度の冷却」[1] を施す．これを $cool(G_3, 2)$ のように記述することにすると，

$$\begin{aligned} cool(G_3,2) &= cool(B_L,2) + cool(B_R,2) + cool(W_3,2) \\ &= (2+*) + (4+\uparrow) + (-7) \\ &= -1 + * + \uparrow \end{aligned}$$

となる．無限小部分は $*+\uparrow$ であるが，これは組合せゲーム理論的には $*+\uparrow <> 0$ である，すなわち,「先着した側が勝つ (先着した側が最後の着手ができる)」ようなゲームであるので，黒は $*$ に先着[†6] して $\uparrow$ を残すことによってトータルで温度 2 の着手[†7] を一手多く着手することができる．そうすると，結果としてダメ数は $-1+2=1>0$ となるので黒はこの攻合いに勝てる．しかし，黒がもし $\uparrow$ の方に着手[†8] してしまうと，$*$ が残ってしまい黒の負けとなることを御確認いただきたい．次に図 4 の攻合いであるが，前と同様に $G_4 = B_L + B_R + W_4$ として，これを「2 度冷却」する．すると，

$$\begin{aligned} cool(G_4,2) &= cool(B_L,2) + cool(B_R,2) + cool(W_4,2) \\ &= (2+*) + (4+\uparrow) + (-7+*) \\ &= -1 + * + * + \uparrow \\ &= -1 + \uparrow \end{aligned}$$

となる．ここで，$*+*=0$ であるので，2 つの $*$ がキャンセルされている．無限小要素としては最後に $\uparrow$ が残るが，$\uparrow > 0$ であるので，黒が $\uparrow$ に先着すれば黒は温度 2 の着手を一手多く着手することができ，結果としてダメ数は $-1+2=1>0$ となって黒が攻合いに勝てるという訳である．こちらの図 4 では，図 3 とは違って $*$ に着手[†9] してはいけない．というのは，もし黒が $*$ に着手すると $*+\uparrow$ が残ることになるが，$*+\uparrow <> 0$ であるので，これは「先着した方が一手余分に着手できる」ことになり，そこに白が先着することによって黒の利得が白に取り返されてしまうのである．

3 おわりに

簡単ではあるが「組合せゲーム理論」が「攻合いのダメ数の計算」に適用できることを示した．部分局面が数多く組合わされば探索では手におえなくなるため，組合せゲーム理論に基づく解析がその威力を発揮する．囲碁のヨセはそういった部分局面の坩堝であり，また，ヨセは対局中に必ず発生するものである[†10]．したがって，Mathematical Go にあるような悩ましい局面が実戦に登場してもおかしくないし，このような解析はプレイヤにとって勝敗を左右する非常に有用な知識となる．しかし，こちらは「攻合い」である．組合せゲーム理論的な解析が有効となるような攻合いの局面が

†4 黒が一子をつなげばダメ数は 4，白が先着して切ればダメ数は 0 になる．
†5 黒が上にグズめばダメ数は 6，白がアテ込んで黒がつなげばダメ数は 4，白が 2 手連打すればダメ数は 0 になる．
†6 左側の一子につながる着手．
†7 ダメ数を 2 だけ { 増す | 減す } 着手．
†8 右側の上の方にグズム着手．
†9 黒の左側の一子につながる着手，または，白の二子を切りながらダメをつめる着手．
†10 もちろん現実には「ヨセなんて無用！」という力碁の方も沢山いらっしゃいますが... :-)

実際の対局中に出現することがヨセほどには多くないのは明らかである．また，単純な攻合いならば，探索だけでも片がついてしまうかもしれないし，さらに，実戦では単に攻め合いに勝てば良いという訳ではなく，攻め合いに持ち込んで勝つことが本当に得になるかどうかの判断も必要とされるので難しいことこの上ない．しかし，それでもなお「組合せゲーム理論を用いた攻合いの解析」は，その理論の適用可能性を広げたという以外にも実際的な意義を持っていると思う．だって，そうでしょ．プレイヤであれば，たとえ勝負に負けても，相手の石を沢山取ってしまえばとりあえずは嬉しかったりするものです！ :-)

最後になりましたが，今回の米国留学にあたって，早稲田大学の瀧沢武信先生には大変お世話になりました．この場をかりてお礼申し上げます．

参考文献

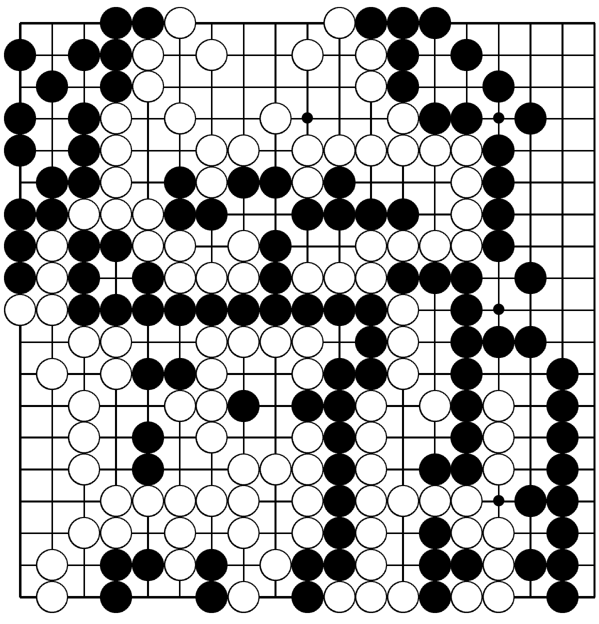
[1] Elwyn Berlekamp, John H. Conway and Richard K. Guy: “Winning Ways –for your Mathematical Plays–”, Academic Press, New York, (1982).

[2] Elwyn Berlekamp and David Wolfe: “Mathematical Go –Chilling Gets the Last Point–”, A.K.Peters, (1994).
(邦訳は吉川，小林，石原による「囲碁の算法–ヨセの研究–」，トッパン，1994)

[3] Howard A. Landman: “Eyespace Values in Go”, in *Games of No Chance*, Cambridge University Press, pp.227-257, (1996).

[4] Martin Müller: “Race to capture: Analyzing semeai in Go”, Game Programming Workshop ’99 (GPW ’99), pp.61-68, (1999).

付録：「この攻合いの結末は？」†11



†11 多少の枝葉は取られても構いません．本体の攻合いの勝ち負けだけに注目します．黒先の場合，白先の場合の両方を考えて下さい．解答は，私の web ページ (`http://www.dumbo.ai.kyutech.ac.jp/~teigo/GoResearch/`)，および，第 9 回のゲーム情報学研究会において発表の予定．